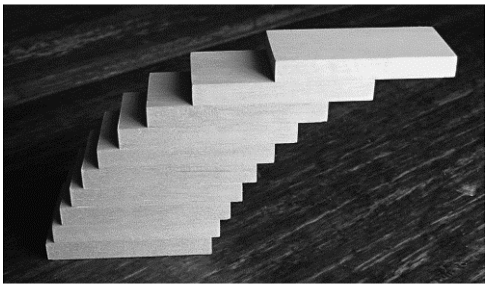
Tegels stapelen

Door gelijke rechthoekige tegels ‘netjes’ op elkaar te stapelen kan een toren gebouwd worden die naar één kant overhelt. Zie de foto.

foto



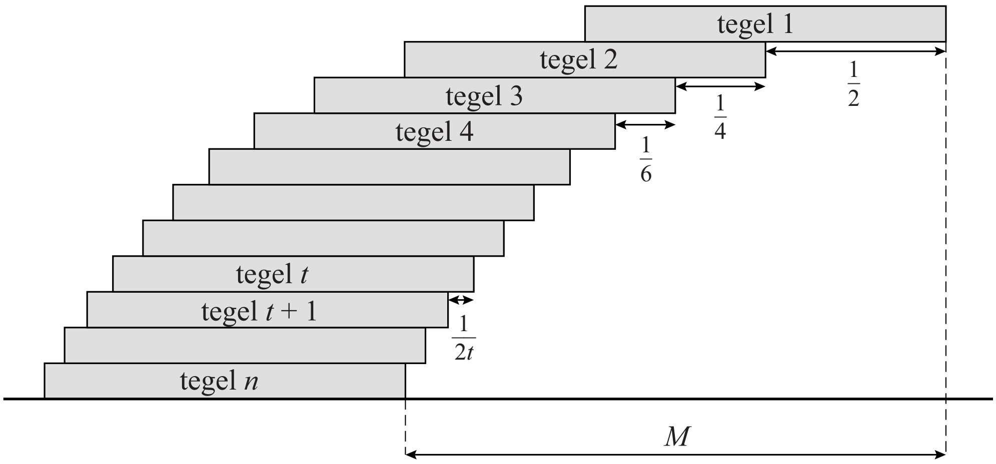
Het uitsteken van de gestapelde tegels vanaf de onderste tegel wordt de **overhang** genoemd. De overhang is maximaal als de stapel tegels nog net in evenwicht is, dus net niet omvalt.

De maximale overhang M bij een stapel van n tegels ontstaat als volgt:

- laat tegel 1 (de bovenste tegel) een halve tegellengte uitsteken ten opzichte van tegel 2 (de eronder liggende tegel);
- laat tegel 2 een kwart uitsteken ten opzichte van tegel 3;
- laat tegel 3 een zesde uitsteken ten opzichte van tegel 4;
- enzovoort.

Algemeen geldt dan: tegel t steekt $\frac{1}{2t}$-deel van een tegellengte uit ten opzichte van tegel $t+1$. Zie de figuur.

figuur



Bij een bepaald aantal tegels is de maximale overhang meer dan één tegellengte.

3p **13** Bereken vanaf welk aantal tegels dit het geval is.

In de rest van deze opgave nemen we tegels van 30 cm lang en 15 cm breed met een dikte van 3 cm. Deze tegels stapelen we weer ‘netjes’ op elkaar, zoals op de foto en in de figuur.

Bij deze tegels kan de maximale overhang M benaderd worden met de formule:

$$M = 34{,}54 \cdot \log(n-1) + 8{,}658 + \frac{15}{2(n-1)} + \frac{5}{4(n-1)^2} \qquad (1)$$

Hierin is M de maximale overhang in cm en is n het totaal aantal tegels in de stapel, met $n \geq 2$.

Wanneer er voldoende tegels beschikbaar zijn, kan in theorie de maximale overhang zo groot worden gemaakt als gewenst.
Met de genoemde 3 cm dikke tegels wordt een overhang van 1 meter gemaakt.

4p **14** Bereken hoeveel cm hoog de stapel tegels in dit geval minstens moet worden volgens formule (1).

Voor grote waarden van n kan M benaderd worden met de formule:

$$M = 34{,}54 \cdot \log(n-1) + 8{,}658 \qquad (2)$$

Hierin is M weer de maximale overhang in cm en is n weer het totaal aantal tegels in de stapel.

4p **15** Bereken voor welke waarde van n de benadering van M met formule (2) voor het eerst minder dan 0,1 centimeter afwijkt van de benadering met formule (1).